МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка

по общему физическому практикуму

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Доцент Пустовалов Г. Е.

Москва - 2012

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие о погрешностях. Измерения не могут быть выполнены абсолютно точно. Всегда имеется некоторая неопределенность в значении измеряемой величины. Эта неопределенность характеризуется погрешностью - отклонением измеренного значения величины от ее истинного значения. Приведем некоторые из причин, приводящих к появлению погрешностей.

1. Ограниченная точность измерительных приборов.

2. Влияние на измерение неконтролируемых изменений внешних условий (напряжения в электрической сети, температуры и т.д.)

3. Действия экспериментатора (включение секундомера с некоторым запаздыванием, различное размещение глаз по отношению к шкале прибора и т.п.).

4. Неполное соответствие измеряемого объекта той абстракции, которая принята для измеряемой величины (например, при измерении объема пластинка считается параллелепипедом, в то время как у нее могут быть закругления на ребрах).

5. Не строгость законов, которые используются для нахождения измеряемой величины или лежат в основе устройства прибора.

Классификация погрешностей. В зависимости от причин, приводящих к возникновению погрешностей, различают их следующие виды.

Промахи - грубые ошибки в значениях измеряемой величины.

Систематические погрешности - такие погрешности, которые соответствуют отклонению измеряемой величины от ее истинного значения всегда в одну сторону - либо в сторону завышения, либо в сторону занижения. При повторных измерениях в тех же условиях величина погрешности остается неизменной. При закономерных изменениях условий погрешность также меняется закономерно.

Случайные погрешности. Даже при очень строгом соблюдении одних и тех же условий повторные измерения одной и той же величины, как правило, приводят к значениям, отличающимся друг от друга, Эта разница в значениях может вызываться причинами самой различной природы. Отклонения от истинного значения при этом могут быть как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, причем величина отклонения также может быть различной.

Приборные погрешности - погрешности, связанные с точностью изготовления прибора, используемого для измерения. Они могут носить как систематический, так и случайный характер.

В зависимости от того, каким способом получается значение измеряемой величины, различают погрешности *прямых* (*непосредственных*) и *косвенных* измерений. *Прямыми* называются измерения, в результате которых значение измеряемой величины получается сразу по шкале прибора (например, измерение длины штангенциркулем) или при помощи какого-либо способа сравнения с эталоном (например, взвешивание на рычажных весах). *Косвенные* - это такие измерения, когда для нахождения некоторой физической величины сначала измеряют прямыми измерениями несколько других величин, а затем по их значениям с помощью каких-либо формул вычисляют значение искомой величины. Одну и ту же величину часто можно найти путем как прямых, так и косвенных измерений. Например, скорость автомобиля может быть определена по спидометру (прямое измерение) или найдена делением пройденного расстояния на время движения (косвенное измерение).

2 ПРОМАХИ

Промахи, как правило, вызываются невнимательностью (например, при измерении диаметра отверстия штангенциркулем часто забывают учесть толщину его ножек). Они могут возникать также вследствие неисправности прибора. От промахов не застрахован никто, однако по мере приобретения экспериментальных навыков вероятность промахов заметно уменьшается.

3. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Систематические погрешности могут возникать по ряду причин. Вот некоторые из них.

1. Несоответствие прибора эталону (например, пластмассовые линейки с течением времени обычно укорачиваются на несколько миллиметров, секундомер может иметь неправильный ход - спешить или отставать на несколько секунд в сутки).

2. Неправильное использование прибора (например, перед взвешиванием не установлено равновесие ненагруженных весов).

3. Пренебрежение поправками, которые нужно ввести в результаты измерения для достижения требуемой точности (например, не учтена зависимость температуры кипения воды от атмосферного давления).

Систематические погрешности, обусловленные некоторыми из этих причин, могут быть сведены к минимуму проверкой приборов, их тщательной установкой, анализом необходимых поправок и т.д. Погрешности, вызванные некоторыми причинами, могут быть скрыты в течение длительного времени и обычно обнаруживаются при нахождении тех же физических величин принципиально другими методами. Анализ подобного рода систематических погрешностей может в ряде случаев привести к открытию неизвестных ранее явлений природы.

В учебных лабораториях систематические погрешности обычно игнорируются и анализ их не производится.

4. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Случайные погрешности вызываются большим числом неконтролируемых причин, влияющих на процесс измерения. Такие причины могут быть объективными (неровности на поверхности измеряемого предмета; дуновение воздуха, ведущее к изменению температуры; скачкообразное изменение напряжения электрической сети и т.п.) и субъективными (разная сила зажима предмета между ножками штангенциркуля, неодинаковое расположение глаза по отношению к шкале прибора, различное запаздывание при включении секундомера и т.п.). Эти причины могут сочетаться в различных комбинациях, вызывая то увеличение, то уменьшение значения измеряемой величины. Поэтому при измерениях одной и той же величины несколько раз получается, как правило, целый ряд значений этой величины, отличающихся от истинного значения случайным образом.

Закономерности, описывающие поведение случайных величин, изучаются *теорией вероятностей*. Под *вероятностью* мы здесь будем подразумевать отношение числа случаев, удовлетворяющих какому-либо условию, к общему числу случаев, если общее число случаев очень велико (стремится к бесконечности). Максимальное значение вероятности равно единице (все случаи удовлетворяют заданному условию). При описании случайных погрешностей обычно используются следующие предположения.

1. Погрешности могут принимать непрерывный ряд значений.

2. Большие отклонения измеренных значений от истинного значения измеряемой величины встречаются реже (менее вероятны), чем малые.

3. Отклонения в обе стороны от истинного значения равновероятны.

Эти предположения справедливы не всегда. Опыт, однако, показывает, что все же в подавляющем большинстве случаев они выполняются достаточно хорошо.

Среднее арифметическое. Пусть при измерении физической величины a получено n значений: $a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n$. Предполагается, что среднее арифметическое этих значений (обозначаемое чертой над буквой)

$$\bar{a} = \frac{\Sigma a_i}{n} \qquad (1)$$

стремится к истинному значению измеряемой величины, если n стремится к бесконечности. При конечном числе измерений среднее арифметическое представляет собой *наиболее вероятное значение* измеряемой величины. Теория вероятностей позволяет оценить возможное отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины.

Погрешности отдельных измерений. За меру погрешности значения a_i, полученного при отдельном измерении, принимают разность между этим значением и истинным значением a. Но так как истинное значение a неизвестно то вместо него берут среднее арифметическое $\bar{a}$ серии измерений. Разности

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= a_1 - \bar{a}, \\ \Delta a_2 &= a_2 - \bar{a}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta a_n &= a_n - \bar{a} \end{aligned} \qquad (2)$$

мы будем называть абсолютными погрешностями отдельных измерений. Среди погрешностей $\Delta a_1, \Delta a_2, ..., \Delta a_n$ встречаются как положительные, так и отрицательные погрешности. Легко показать, что алгебраическая сумма абсолютных погрешностей равна нулю.

Средней квадратичной погрешностью, или **стандартным отклонением,** отдельного измерения называется величина

$$S_{a_i} = \sqrt{\frac{\Delta a_1^2 + \Delta a_2^2 + \ldots + \Delta a_n^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta a_i^2}{n-1}}. \qquad (3)$$

Здесь n - число измеренных значений. Заметим, что для случая, когда проведено лишь одно измерение (n = 1), формула (3) неприменима, и для оценки погрешности следует пользоваться другими соображениями. Одним измерением ограничиваются, если заведомо известно, что приборная погрешность значительно превышает случайную погрешность.

Стандартное отклонение имеет следующий смысл. При большом числе измерений вероятность того, что модуль значения Δa_i не превышает S_{a_i} или, что то же самое, что значение a_i лежит в пределах от $\bar{a} - S_{a_i}$ до $\bar{a} + S_{a_i}$, составляет 0,67 ≈ 2/3. Иначе говоря, если величина a измерена, например, 100 раз, то около 67 случаев будет таких, что $\bar{a} - S_{a_i} < a_i < \bar{a} + S_{a_i}$.

Погрешность среднего арифметического. Средняя квадратичная погрешность S_{a_i} отдельного измерения, определяемая формулой (3), с возрастанием n стремится к некоторой определенной величине (собственно погрешностью согласно теории вероятности и является этот предел). С другой стороны, среднее арифметическое $\bar{a}$ по мере увеличения n должно приближаться к истинному значению a (если, конечно, устранены систематические погрешности). Следовательно, погрешность среднего арифметического должна при этом уменьшаться. Согласно теории вероятностей средняя *квадратичная погрешность*, или *стандартное отклонение, среднего арифметического* определяется формулой

$$S_{\bar{a}} = \frac{S_{a_i}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta a_i^2}{n(n-1)}}\,, \qquad (4)$$

т.е. $S_{\bar{a}}$ с возрастанием числа измерений n убывает обратно пропорционально $\sqrt{n}$.

Стандартное отклонение среднего арифметического имеет следующий смысл. Если проведено достаточно большое число серий измерения некоторой величины a и каждая из этих серий содержит одинаковое достаточно большое число отдельных измерений, то вероятность того, что среднее арифметическое $\bar{a}$ серии отличается от истинного значения a не более, чем на $S_{\bar{a}}$, составляет 0,67 = 67%.

Доверительный интервал и доверительная вероятность. Вероятность того, что истинное значение измеряемой величины лежит внутри некоторого интервала, называется *доверительной вероятностью*, или *коэффициентом надежности,* а сам интервал - *доверительным интервалом*. Каждой доверительной вероятности соответствует свой доверительный интервал. В частности, доверительной вероятности 0,67 соответствует доверительный интервал от $a - S_{\bar{a}}$ до $a + S_{\bar{a}}$. Однако это утверждение справедливо только при достаточно большом числе измерений (более 10), да и вероятность 0,67 не представляется достаточно надежной - примерно, в каждой из трех серий измерений a может оказаться за пределами доверительного интервала. Для получения большей уверенности в том, что значение измеряемой величины лежат внутри доверительного интервала, обычно задаются доверительной вероятностью 0,95 - 0,99. Доверительный интервал для заданной доверительной вероятности α с учетом влияния числа измерений n можно найти, умножив стандартное отклонение среднего арифметического на так называемый коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$. Коэффициенты Стьюдента для ряда значений α и n приведены в таблице 1.

Таблица 1

Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha n}$.

Число измерений n	Доверительная вероятность α			
	0,67	0,90	0,95	0,99
2	2,0	6,3	12,7	63,7
3		2,9	4,3	
4	1,3	2,4	3,2	5,8
5	1,2	2,1	2,8	4,6
6	1,2	2,0	2,6	4,0
7		1,9	2,4	
8		1,9	2,4	
9		1,9	2,3	
10	1,1	1,8	2,3	3,3
15		1,8	2,1	
20		1,7	2,1	
100	1,0	1,7	2,0	2,6

Окончательно, для измеряемой величины a при заданной доверительной вероятности α и числе измерений n получается условие

$$\overline{a} - t_{\alpha n} S_{\overline{a}} < a < \overline{a} + t_{\alpha n} S_{\overline{a}} . \qquad (5)$$

Величину $\Delta a_{сл} = t_{\alpha n} S_{\overline{a}}$ мы будем называть *случайной погрешностью* величины a.

5. ПРИБОРНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Предполагая, что приборные погрешности, имеющие систематический характер, устранены (весы выставлены по отвесу и уравновешены в отсутствие нагрузки, стрелка отключенного электроизмерительного прибора показывает на нуль, часы выверены по сигналам точного времени и т.д.), мы все приборные погрешности будем относить к случайным. Такие погрешности могут возникать при изготовлении приборов или при их градуировке. Обычно довольствуются сведениями о допустимых приборных погрешностях, сообщаемых заводами-изготовителями в паспортах, прилагаемых к приборам. Завод ручается, что погрешности отсчета по прибору не выходят за пределы, указываемые в паспорте. При этом остаются неизвестными ни конкретная величина, ни знак погрешности, получающейся в результате отдельного измерения данным прибором. Поэтому такие погрешности следует относить к случайным погрешностям с достаточно большой доверительной вероятностью (порядка 0,95 и выше). Допустимые погрешности обычно включают в себя и те, которые могут возникнуть при приведении приборов в рабочее состояние (установке на нуль и т.п.) при условии выполнения заводской инструкции.

Приведем допустимые погрешности некоторых приборов, используемых в лабораториях физического практикума.

Допустимая погрешность:

1. Приборы, снабженные нониусом (штангенциркули, угломерные инструменты и пр.) как правило, имеют допустимую погрешность, равную цене деления нониуса:

а) штангенциркули с пределами измерения 0-125 мм и ценой деления нониуса 0,1 мм . . . . 0,1 мм

б) штангенциркули с пределами измерения 0-150 мм и ценой деления нониуса 0,05 мм . . . . 0,05 мм

в) штангенциркули с пределами измерения 0-250 мм и ценой деления нониуса 0,05 мм . . . . 0,1 мм

2. Микрометры . . . . 0,004 мм

3. Индикаторы часового типа для измерения малых размеров с ценой деления 0,01 мм:

а) с пределами измерения 0-2 мм . . . . 0,012 мм б) с пределами измерения 0-10 мм . . . . 0,022 мм

4. Технические весы с нагрузкой до 5 кг и наименьшим разновеском в 100 мг . . . . 0,1 г

5. Секундомеры механические с ценой деления 0,2 и 0,1 с при измерении промежутка времени 120 с (погрешность хода по сравнению с эталонными часами) . . . . 0,1 с

6. Лабораторные ртутные термометры (без указания класса точности) . . . . 1°С

Стрелочные электроизмерительные приборы по величине допустимой погрешности делятся на *классы точности,* которые обозначаются на шкалах приборов цифрами 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 (цифры могут быть помещены в кружок или ромбик). Класс точности показывает величину допустимой погрешности в процентах от значения измеряемой величины, соответствующего отклонению стрелки до последнего деления шкалы. Например, если у прибора последнее деление шкалы 300 В, а класс его точности 0,5, то допустимая погрешность равна 0,5% от 300 В, или 300×0,5/100 В = 1,5 В. Такая же допустимая погрешность 1,5 В будет и для любого другого значения, измеряемого по этой шкале.

В случае многошкального прибора, имеющего разные пределы измерения и дающего возможность измерять различного рода величины (силу тока, напряжение, сопротивление и т.д.) класс точности обычно не зависит от предела измерения, но может зависеть от рода тока (постоянный или переменный) и от рода измеряемой величины. На шкале такого прибора указывается несколько классов точности с условными обозначениями у каждого из них (— или — - постоянный ток, ~ или ≈ - переменный ток, ~ - и постоянный и переменный ток, Ω - сопротивление, μF или C_x - емкость и т.д.).

Цифровые электроизмерительные и прочие приборы имеют как правило допустимую погрешность, составляющую 1-2 единицы последнего индицируемого разряда.

Если сведений о допустимой приборной погрешности не имеется, то в качестве нее можно принять половину наименьшего деления шкалы прибора или половину наименьшего значения измеряемой величины, которое еще можно найти при помощи этого прибора. Например, при измерении длины линейкой с миллиметровыми делениями за допустимую погрешность принимается 0,5 мм.

Допустимые погрешности, приведенные здесь, относятся к точности изготовления самого прибора. При измерении же прибором в ряде случаев погрешность может быть заметно больше. Например, из-за трудности отсчета на глаз десятых долей миллиметра погрешность при измерении металлической линейкой может составлять 0,2-0,3 мм, хотя сама линейка изготовлена с точностью до 0,1 мм. При измерении секундомером небольших промежутков времени (менее 5 минут) погрешность определяется не точностью хода секундомера, а запаздыванием при включении и выключении, и составляет обычно 0,2-0,4 с. Подобные погрешности рассматриваются не как приборные, а как случайные.

6. ПОЛНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Сложение погрешностей. В теории вероятностей показывается, что в тех случаях, когда погрешности вызываются несколькими независимыми друг от друга случайными причинами, то складываются не сами погрешности, а их квадраты. Поэтому полная абсолютная погрешность Δa измеряемой величины выражается через ее случайную $\Delta a_{сл}$ и приборную $\Delta a_{пр}$ погрешности формулой

$$\Delta a = \sqrt{\Delta a_{сл}^2 + \Delta a_{пр}^2}\ . \qquad (6)$$

Здесь предполагается, что погрешностям $\Delta a_{сл}$ и $\Delta a_{пр}$ соответствуют приблизительно одинаковые доверительные вероятности. Такую же доверительную вероятность будет иметь и Δa.

Из формулы (6) следует, что в случае, когда одна из погрешностей $\Delta a_{сл}$ или $\Delta a_{пр}$ даже в небольшое число раз меньше другой, то ее вклад в полную погрешность оказывается незначительным. В частности, если одна из погрешностей составляет менее 1/5 другой, то ее квадрат будет уже менее 1/25 квадрата другой, а вклад в полную погрешность - менее 1/50. Ясно, что в таком случае меньшей погрешностью можно пренебречь.

В некоторых случаях при многократных измерениях получается одно и то же значение измеряемой величины. Это означает, что случайная погрешность не превышает наименьшего значения, которое может быть измерено данным прибором. В таких случаях полная погрешность целиком определяется допустимой приборной погрешностью.

Относительная погрешность. Кроме абсолютной погрешности результат также характеризуется еще и *относительной погрешностью,* т.е. отношением Δa к среднему арифметическому значению $\bar{a}$. Относительная погрешность $\Delta a / \bar{a}$ выражается в виде десятичной дроби или в процентах и показывает качество измерения. Если при измерениях получена относительная погрешность более 10%, то говорят, что произведено не измерение, а лишь оценка измеряемой величины. В лабораториях физического практикума относительная погрешность обычно составляет 1-10%. В научных же лабораториях измерения некоторых физических величин, таких, например, как длина световой волны, осуществляется с точностью порядка миллионной доли процента.

Запись приближенных чисел. Поскольку значения физических величин, полученные в результате измерений, имеют погрешности, они выражаются не точными, а приближенными числами. *Незначащими цифрами* приближенного числа называются нули, стоящие слева в десятичных дробях до первой отличной от нуля цифры, и нули, поставленные в конце числа, вместо цифр, отброшенных при округлении. Остальные цифры называются *значащими*. Например, в числе $\underline{0{,}0}123$ значащие цифры 1,2,3; в числе $508\underline{000}$, полученном округлением числа 507893, три нуля - незначащие (незначащие нули подчеркнуты). В конце числа могут быть и значащие нули. Так, например, во втором числе выражения 5 км = 5000 м нули не заменяют отброшенные при округлении цифры, а выражают точное соотношение между единицами длины.

Для того, чтобы числа не содержали незначащих нулей, их принято записывать в показательной (экспоненциальной) форме с запятой после первой значащей цифры. В этом случае числа предыдущих примеров имеют вид: $0{,}00123 = 1{,}23\cdot10^{-2}$; $508000 = 5{,}08\cdot10^{5}$. Значащие нули при такой записи не отбрасываются: 5 км = $5{,}000\cdot10^{3}$ м.

В числах, выражающих значения, для которых указана погрешность, последняя цифра (*сомнительная*) стоит в том же разряде, что и первая значащая цифра погрешности. Цифры, находящиеся в следующих разрядах как самого числа, так и его погрешности, должны быть отброшены как *неверные* по правилам округления, причем погрешность округляют всегда в сторону увеличения. Таким образом, сама погрешность содержит только одну значащую цифру. Однако, если первая цифра погрешности единица, то в погрешности оставляют две цифры, а в самом числе сохраняют лишний разряд. Наконец, если данное число не является окончательным результатом, а будет участвовать в каких-либо вычислениях, то в нем, как и в его погрешности сохраняют лишний разряд.

Запись окончательного результата измерения. В записи окончательного результата измерения должны содержаться:

1) название измеряемой величины и ее буквенное обозначение;

2) наиболее вероятное значение измеряемой величины, т.е. значение, получающееся в результате отсчета по прибору, если измерение проводилось однократно, или среднее арифметическое этих отсчетов, если измерение проводилось несколько раз.

3) полная абсолютная погрешность измеряемой величины;

4) единица измерения, в которой выражена измеряемая величина и ее полная абсолютная погрешность;

5) доверительная вероятность результата;

6) относительная погрешность, выраженная в виде десятичной дроби или в процентах.

При записи результата измерения следует соблюдать приведенные выше правила записи приближенных чисел.

ПРИМЕР. Пусть при измерении пять раз длины L предмета с помощью формул (1), (2) и (4) получены среднее арифметическое значение длины L = 64,945 мм и стандартное отклонение среднего арифметического S_L = 0,057879186 мм. Измерения проводились с помощью штангенциркуля с допустимой приборной погрешностью $\Delta L_{пр}$ = 0,05 мм. Задавшись доверительной вероятностью α = 0,95, находим по таблице 1 коэффициент Стьюдента для пяти измерений $t_{\alpha n}$ = 2,8. Умножив на него S_L , получим случайную погрешность $\Delta L_{сл}$ = 0,16206172 мм. Полагая, что доверительная вероятность приборной погрешности не менее 0,95, по формуле (6) найдем полную абсолютную погрешность измерения ΔL = 0,16959953 мм и его относительную погрешность $\Delta L / \overline{L} = 0{,}0026114332$. Здесь предполагалось, что расчет проводился на калькуляторе с восемью значащими цифрами.

Перед окончательной записью результата полученные при расчете числа следует округлить. При этом в абсолютной погрешности ΔL, первая значащая цифра которой 1, следует оставить две значащих цифры, а в относительной погрешности $\Delta L / \overline{L}$ - одну, т.е. записать ΔL = 0,17 мм и $\Delta L / \overline{L}$ = 0,003. Так как последняя значащая цифра абсолютной погрешности 7 находится в разряде сотых, то результат измерения длины также следует округлить до сотых, т.е. записать L = 64,95 мм.

Таким образом, запись окончательного результата измерения должна иметь следующий вид

$$L = (64{,}95 \pm 0{,}17) \text{ мм},$$
$$\Delta L / \overline{L} = 0{,}003 = 0{,}3\% \qquad (7)$$
(доверительная вероятность 0,95).

Если результат желательно представить в метрах, то первая строка примет вид

$$L = (6{,}495 \pm 0{,}017)\cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

7. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Оценка погрешностей, возникающих при косвенных измерениях, основывается на следующих предположениях.

1. Относительные погрешности величин, полученных прямыми измерениями и участвующих в расчете искомой величины, должны быть малы по сравнению с единицей (на практике они не должны превышать 10%).

2. Для погрешностей всех величин, участвующих в расчете, принята одна и та же доверительная вероятность. Эту же доверительную вероятность будет иметь и погрешность искомой величины.

3. Наиболее вероятное значение искомой величины получается, если для ее расчета используются наиболее вероятные значения исходных величин, т.е. их средние арифметические значения.

Погрешность в случае одной исходной величины. Как будет видно из дальнейшего, в одних случаях нахождение погрешности величины, при ее косвенном измерении удобно начинать с абсолютной погрешности, в других - с относительной.

Абсолютная погрешность. Пусть искомая величина y, измеряемая косвенно зависит только от одной величины a, полученной прямым измерением. Границы интервала, в котором с заданной вероятностью лежит величина a, определяются средним арифметическим значением $\overline{a}$ и полной абсолютной погрешностью Δa величины a. Это значит, что значение a может лежать внутри интервала с границами $\overline{a} \pm \Delta a$.

При косвенном измерении для величины $y(a)$ такие границы будут определяться ее наиболее вероятным значением $\overline{y} = y(\overline{a})$ и погрешностью Δy, т.е. значения y лежат внутри интервала с границами $\overline{y} \pm \Delta y$. Верхней границей для y (при монотонном возрастании) будет значение, соответствующее верхней границе a, т.е. значение $\overline{y} + \Delta y = y(\overline{a} + \Delta a)$. Таким образом, абсолютная погрешность Δy величины y имеет вид приращения функции $y(a)$, вызванного приращением ее аргумента a на величину Δa его абсолютной погрешности. Следовательно, можно воспользоваться правилами дифференциального исчисления, согласно которому при малых значениях Δa приращение Δy можно приближенно выразить в виде

$$\Delta y = \frac{dy}{da} \Delta a \,. \qquad (8)$$

Здесь $\frac{dy}{da}$ - производная по a функции $y(a)$ при $a = \overline{a}$. Таким образом, абсолютная погрешность окончательного результата может быть вычислена с помощью формулы (8), причем доверительная вероятность соответствует той доверительной вероятности, которую имеет Δa.

Относительная погрешность. Чтобы найти относительную погрешность значения y, поделим (8) на y и примем во внимание, что $\frac{1}{y}\frac{dy}{da}$ представляет собой производную по a натурального логарифма y. В результате получится

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y}\frac{dy}{da}\Delta a = \frac{d(\ln y)}{da}\Delta a\,. \tag{9}$$

Если в это выражение подставить $a = \bar{a}$ и $y = \bar{y}$, то его значение и будет относительной погрешностью величины y.

Погрешность в случае нескольких исходных величин. В общем случае в формулу, по которой вычисляется величина y, измеряемая косвенно, может входить несколько исходных величин a, b, c, ... , для которых прямыми измерениями получены средние значения $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ... и полные абсолютные погрешности $\Delta a,\ \Delta b,\ \Delta c, \ldots$. Нахождение погрешности Δy величины y в этом случае основывается на следующих предположениях.

1. Наличие погрешности одной из исходных величин не влечет за собой обязательного появления погрешностей других исходных величин, т.е. погрешности различных величин, найденных прямыми измерениями, представляют собой независимые случайные числа. Поэтому частную погрешность (вклад в общую погрешность одной из исходных величин) можно находить, полагая погрешности всех других исходных величин равными нулю.

2. При нахождении общей погрешности искомой величины складываться должны квадраты ее частных погрешностей так, как это делается для нахождения полной абсолютной погрешности прямого измерения, обусловленной независимыми между собой случайной и приборной погрешностями.

Абсолютная погрешность. Из пункта 1 следует, что правило для нахождения любой частной погрешности величины y такое же, как и в том случае, когда y зависит только от одной исходной величины. Но при дифференцировании в формуле (8) следует брать частную производную y по данной исходной величине, так как предположение об отсутствии погрешностей у других исходных величин соответствует постоянству этих величин. Таким образом, частные погрешности Δy_a, Δy_b, Δy_c, ... величины $y(a,b,c,...)$ вычисляются по формулам

$$\left(\Delta y\right)_a = \frac{\partial y}{\partial a}\Delta a, \quad \left(\Delta y\right)_b = \frac{\partial y}{\partial b}\Delta b, \quad \left(\Delta y\right)_c = \frac{\partial y}{\partial c}\Delta c, \ldots \qquad (10)$$

Здесь в выражения (10), полученные в результате дифференцирования, следует подставить средние арифметические значения исходных величин $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}, \ldots$

Абсолютная погрешность величины *y*, обусловленная всеми частными погрешностями, как это следует из пункта 2, равна

$$\Delta y = \sqrt{\left(\Delta y\right)_a^2 + \left(\Delta y\right)_b^2 + \left(\Delta y\right)_c^2 + \ldots} \qquad (11)$$

или

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\Delta c\right)^2 + \ldots} \ . \qquad (12)$$

Так как выражения (10) для частных погрешностей могут быть довольно громоздкими, то легче сначала по формулам (10) найти их численные значения, а затем воспользоваться формулой (11). Формулу же (12) вообще при этом писать не требуется.

Относительная погрешность. Вычисление относительной погрешности $\frac{\Delta y}{y}$ величины *y*, измеряемой косвенно, в случае ее зависимости от несколько исходных величин *a*, *b*, *c*, ... аналогично вычислению абсолютной погрешности с тем лишь отличием, что для нахождения частных относительных погрешностей берутся частные производные от натурального логарифма *y*(*a*,*b*,*c*,...):

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_a = \frac{\partial(\ln y)}{\partial a}\Delta a, \qquad \left(\frac{\Delta y}{y}\right)_b = \frac{\partial(\ln y)}{\partial b}\Delta b,$$

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_c = \frac{\partial(\ln y)}{\partial c}\Delta c, \ldots \qquad (13)$$

После дифференцирования сюда следует подставить на место величин *a*, *b*, *c*, ... их средние арифметические значения $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$, ...

Относительная погрешность, обусловленная всеми частными погрешностями (13), вычисляется по формуле

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_a^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)_b^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)_c^2 + \ldots} \qquad (14)$$

Особый случай вычисления погрешностей. Ранее предполагалось, что при прямых измерениях каждая из величин *a, b, c*, ... измеряется по несколько раз в *неизменных* условиях и что в ее полную погрешность включена приборная погрешность. Однако возможны случая, когда величины *a, b, c,* ... имеют принципиально *разные* значения, сознательно изменяемые в процессе опыта (например, ускорение свободного падения определяется по периодам колебаний математических маятников нескольких разных длин). В таких случаях рекомендуется вычислить значения искомой величины *y* для каждого из *n* опытов по отдельности:

$$y_1 = y(a_1, b_1, c_1, ...), \quad y_2 = y(a_2, b_2, c_2 , ...), ... , y_n = y(a_n, b_n, c_n , ...) .$$

В качестве наиболее вероятного значения берется среднее значение:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n} . \tag{15}$$

Случайная погрешность $\Delta y_{сл}$ величины *y* вычисляется так же, как и случайная погрешность при прямом измерении (формулы (2),(4),(5), в которых вместо $a_1, a_2, ... , a_n$ фигурируют $y_1, y_2, ... , y_n$.

Вычисление приборной погрешности $\Delta y_{пр}$ производится следующим образом. Находят формулы (10) для частных абсолютных погрешностей величины *y*. В эти формулы в качестве $\Delta a, \Delta b, \Delta c, ...$ подставляют приборные погрешности соответствующих величин, а для *a, b, c,* ... берут их средние значения. За квадрат приборной погрешности величины *y* принимают сумму квадратов частных погрешностей. Окончательно полная погрешность величины *y* подсчитывается по формуле

$$\Delta y = \sqrt{\Delta y_{сл}^2 + \Delta y_{пр}^2} . \tag{16}$$

Погрешности табличных значений. Если в формулу для вычисления величины, измеряемой косвенно, входят величины, значения которых берутся из математических или физических таблиц, то их вклады в погрешность искомой величины учитываются на общих основаниях на ряду с погрешностями величин, полученных прямыми измерениями.

В описаниях работ физического практикума и в табличках на лабораторных столах указаны погрешности с доверительной вероятностью 0,95. Если для физических величин, приводимых в справочниках, указываются погрешности, то под ними, как правило, подразумеваются стандартные отклонения, имеющие доверительную вероятность 0,67. Для того, чтобы доверительная вероятность составляла 0,95, значения этих погрешностей следует умножать на 2.

Если для величин, приводимых в физических или математических справочниках, погрешность не указана, то подразумевается, что погрешность не превышает половины единицы последнего разряда числа. Например, в значении синуса 0,479 последняя цифра 9 стоит в разряде тысячных. Поэтому погрешность данного значения не превышает 0,0005 с доверительной вероятностью 1.

В случаях, когда для расчетов в физическом практикуме используются калькуляторы или компьютеры, погрешностей математических величин (числа π, значений тригонометрических функций и т.п.) учитывать не следует - они пренебрежимо малы по сравнению с погрешностями измеряемых величин.

8. ОБЩИЕ СОВЕТЫ К РАСЧЕТУ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Расчет погрешностей обычно представляет собой достаточно трудоемкую часть экспериментальной работы. Этот расчет можно заметно облегчить, используя приводимые далее приемы.

1. Если в расчетную формулу в качестве слагаемого входит поправочный член, численная величина которого значительно меньше остальных членов, то при выводе формул (10) или (14) для частных погрешностей его можно заранее отбросить. Наличие такого члена может быть оговорено в теории, или он может быть обнаружен при численном расчете искомой величины.

2. В случае расчетных формул, представляющих собой *сумму* различных членов, вычисление погрешностей следует начинать с нахождения формул (10) для *частных абсолютных погрешностей*. Относительную погрешность получают делением абсолютной погрешности на искомую величину уже после нахождения численных значений.

3. Если расчетная формула состоит из *множителей* и *делителей* в разных степенях (формула удобна для логарифмирования), то вычисление погрешностей начинают с нахождения формул (13) для **частных** *относительных погрешностей.* В этом случае абсолютную погрешность находят после расчета численных значений умножением относительной погрешности на искомую величину.

4. Во всех случаях после нахождения формул (10) или (13) для частных погрешностей нужно найти их численные значения, которые и следует подставить в формулы (11) или (14) соответственно. При этом погрешности, величина которых меньше наибольшей из погрешностей в пять раз и более, отбрасываются.

5. При вычислении погрешностей в числах, участвующих в арифметических операциях сохраняют не более трех значащих цифр.

Применение правил нахождения погрешностей в конкретных случаях подробно разбирается в *задачах 1 и 2*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. -Л., «Наука», 1974.

2. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и офрмление результатов эксперимента. -М., Изд-во МГУ, 1977.

3. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. -М., «Мир», 1985.